



## Obtenção das equações de taxa de contagem de pico descrevendo as coincidências-soma de gama e raios-X

Ferreira Filho <sup>a,b</sup> A.L., Gomes <sup>a</sup> R.S., da Silva <sup>a</sup> R.L., da Cruz <sup>a</sup> P.A.L.,  
Delgado <sup>a</sup> J.U., Lopes <sup>b</sup> R.T.

<sup>a</sup> IRD, Laboratório Nacional de Metrologia das Radiações Ionizantes (LNMRI/IRD/CNEN)  
22783-127 Rio de Janeiro, RJ, Brasil

<sup>b</sup> COPPE, Laboratório de Instrumentação Nuclear (LIN/PEN/COPPE/UFRJ)  
21941-594 Rio de Janeiro, RJ, Brasil  
[alfredo@ird.gov.br](mailto:alfredo@ird.gov.br)

---

### RESUMO

Com o objetivo de estudar o efeito soma por coincidência na espectrometria de raios X e gama do Ba-133, se apresenta um método para, através de uma planilha Excel, aplicar a teoria desenvolvida por Novković et al. baseada no seguimento ou rastreamento de todas as rotas ou trajetórias de decaimento de radioisótopos com esquema de decaimento complexo e suas consequências em um detector, ou seja, as energias susceptíveis de serem depositadas, associadas às correspondentes probabilidades de detecção. Trata-se de, utilizando inicialmente uma técnica matricial, obter equações de taxa de contagem, de picos em espectros fotônicos, equações que descrevem as somas por coincidência de raios X e gama de radionuclídeo, como o Ba-133, no qual a cascata de desexcitação do núcleo tem lugar simultaneamente com a desexcitação em cascata das camadas atômicas. Por meio da análise detalhada do espectro do Ba-133, a partir dos 1860 resultados teóricos obtidos das 14 diferentes rotas de decaimento, o método permite determinar, dentre os 167 picos possíveis (foto-picos e picos-soma), a influência dos efeitos summing-in (efeitos de soma em cascata) nos cerca de 50 picos normalmente registrados em um espectrômetro HPGe com uma eficiência relativa de 50%.

**Palavras-chave:** *efeito soma-coincidência, espectrometria de fótons, equações de taxa de contagem, Ba-133*

---

---

**ABSTRACT**

In order to study the coincidence summing effect in gamma and X-rays spectrometry of Ba-133, a method is presented, using an Excel spreadsheet, to apply the theory developed by Novković et al., based on tracking all decay paths of radioisotope with complex decay scheme and their outcomes, i.e., deposited energies in the detector and corresponding detection probabilities. Using initially a matrix technique to obtain counting rate equations of peaks in photon spectrum, equations that describe coincidence summing of gamma and X-rays of radionuclides, such as Ba-133, in which the nucleus deexcitation cascade takes place simultaneously with the cascade deexcitation of the atomic shell. Based on the analysis of the Ba-133 spectrum, from 1860 theoretical results, obtained from the 14 different decay paths, the method allows to determine, among 167 possible peaks (photo-peaks and sum-peak), the influence of the effects (cascade sum effects) in about 50 peaks, normally recorded on an HPGe spectrometer with a relative efficiency of 50%.

**Keywords:** *coincidence summing effect, photon spectrometry, counting rate equations, <sup>133</sup>Ba*

---

## 1. INTRODUÇÃO

Detectores de germânio por sua alta resolução, relativamente boa eficiência e uma faixa de sensibilidade de vários keV a vários MeV são amplamente utilizados na espectrometria gama. Entretanto, o efeito soma por coincidência deve ser tomado em conta, em particular, a uma pequena distância fonte-detector.

A soma por coincidência verdadeira (*true coincidence summing* ou *cascade summing*) ocorre quando dois ou mais fótons são emitidos em cascata desde o mesmo núcleo e detectados dentro do tempo de resolução de um espectrômetro. Os tempos de vida dos níveis nucleares para transições  $\gamma$  são, em regra, muito mais curtos do que o tempo de coleta de cargas nos detectores de germânio. Então, quando dois fótons, temporalmente coincidentes, interagem com um detector, cada um depositando toda ou parte de sua energia, a resposta do detector é proporcional à energia total depositada. O fenômeno não deve ser confundido com empilhamento de pulsos (*pile-up*), somas aleatórias devido a altas taxas de contagem.

Em geral, três tipos de efeitos resultam das soma-coincidências verdadeiras. Se um dado fóton deposita toda sua energia no detector e outro fóton coincidente deposita apenas parte de sua energia,

se produz uma "perda no pico" (*peak loss*) do primeiro fóton, fenômeno conhecido como efeito "*summing-out*" (de soma para fora do pico). Alternativamente, no caso do efeito "*summing-in*" (de soma para dentro de um novo pico), se dois fótons coincidentes depositam, cada um, toda sua energia no detector, um "pico soma" aparece no espectro. O terceiro fenômeno se produz quando os raios coincidentes depositam apenas parte de suas energias no detector, o que contribui apenas para o background, não resultando acréscimos nem nas intensidades nem nas eficiências de pico.

De fato, se dois ou mais fótons são emitidos em cascata, quaisquer dois deles podem depositar todas suas energias no detector formando um pulso composto, indistinguível daquele devido a um só evento. Os raios X (que surgem de capturas de elétrons, de decaimentos de pósitrons ou de conversões internas) são outro tipo de radiação que pode estar em verdadeira coincidência com a radiação  $\gamma$  contribuindo ao efeito "*summing-in*". Os picos devidos à soma por coincidência de raios  $(X + X)$ ,  $(X + \gamma)$  e  $(\gamma + \gamma)$  podem, por conseguinte, complicar o espectro obtido por este tipo de detector e mudar significativamente as taxas de contagem dos foto-picos ou picos de absorção total (*full energy peak* ou *FEP*, na sigla em inglês).

A aplicação de enfoques analíticos para calcular efeitos soma por coincidência, como em [1], permite prever todos os picos soma que se produz em um espectro. São enfoques que permitem escrever equações de taxa de contagem para foto-picos, para os picos soma por coincidência e para a taxa de contagem total. Determinando-se, por programas matemáticos comerciais, as raízes do sistema destas equações, pode-se determinar as eficiências de pico e total, assim como a atividade das fontes radioativas, incógnitas nestas equações. Métodos como estes são adequados para deduzir as taxas de contagem para espectros gama de radionuclídeos nos quais a cascata de desexcitação do núcleo tem lugar simultaneamente com a desexcitação em cascata da camada atômica. O método DMM (multiplicação direta de matrizes) gera expressões teóricas das taxas de contagem para cada pico de um espectro (foto-picos e picos-soma, excluindo os picos de escape), assim como para a taxa de contagem total. Utilizando este método, se pode identificar todas as possíveis rotas de decaimento e calcular suas consequências em um detector (energias depositadas e as respectivas probabilidades de deposição), para os casos nos quais se desconhecem as eficiências de pico e total do mesmo e a atividade da fonte medida. Em diversos estudos [2] [3] [4] [5] se encontrou que as

taxas de contagem de picos avaliadas teoricamente mediante o método DMM estavam de acordo com os valores obtidos experimentalmente.

O radionuclídeo Ba-133 foi escolhido neste estudo porque seu decaimento é complexo, tendo ampla aplicação em espectrometria gama. Em seu espectro de energia notamos um grande número de picos-soma. A hipótese implícita é que os fótons  $K_{\alpha}$ ,  $K_{\beta}$  e  $\gamma$  são emitidos desde o mesmo núcleo. Fótons emitidos desde diferentes núcleos podem produzir somente somas por coincidências aleatórias que podem ser reduzidas elegendo-se uma fonte de baixa atividade. O Ba-133 transita por quatro capturas de elétrons (**Tabela 1**) aos níveis excitados do Cs-133 - 437 keV (85,41%), 384 keV (14,46%), 160,61 keV (0,3%) e 81,00 keV (0,7%). A transição por captura eletrônica diretamente ao estado fundamental do Cs-133 se desprezou já que seu rendimento é inferior a 0,001%. Os valores das energias gama, os coeficientes de conversão interna para a camada K,  $\alpha_K$ , e total,  $\alpha$ , se enumeram na **Tabela 2**. Além dos nove fótons gama, o decaimento do Ba-133 é seguido por emissões de raios X (**Tabela 3**), como consequência dos processos de captura de elétrons e de conversão interna [6]. Com o estado fundamental do Ba-133 representado por  $n = 5$ , como se fosse mais um nível excitado do núcleo filho, as características principais de seu complexo esquema de decaimento se mostram na **Figura 1**. O estado fundamental do Cs-133 é marcado por 0. Entre estes dois estados fundamentais, há  $n - 1$  níveis excitados. Além dos fótons gama, o decaimento do radionuclídeo Ba-133 é seguido por emissões de dois fótons KX (**Tabela 3**) como uma consequência dos processos de captura eletrônica e de conversão interna, razão pela qual há um grande número de picos de coincidência no espectro. No presente estudo só se tomam em conta os raios X  $K_{\alpha}$  e  $K_{\beta}$ , enquanto que outros raios X e a radiação de Bremsstrahlung se desprezam.

**Tabela 1:** Dados nucleares do Ba-133 para captura eletrônica

Transição	Probabilidade de captura	Probabilidade de captura eletrônica da camada K
Ba $\rightarrow$ Cs	$y_{ij}$ (%)	$P_K$
$\epsilon_{5 \rightarrow 4}$	0,854100	0,671
$\epsilon_{5 \rightarrow 3}$	0,144600	0,7727
$\epsilon_{5 \rightarrow 2}$	0,003000	0,83
$\epsilon_{5 \rightarrow 1}$	0,007000	0,84

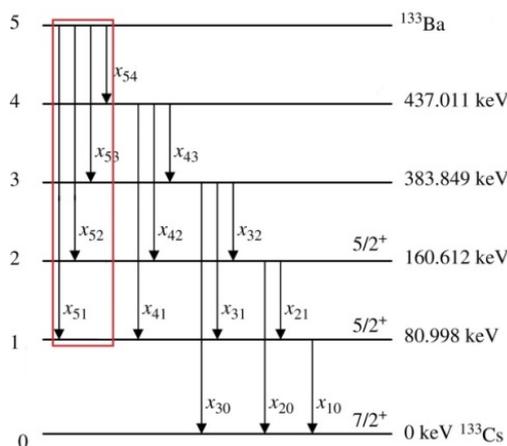
**Tabela 2:** Dados nucleares para transições gama

Transição no Cs-133 nível $i \rightarrow j$	Energia (keV)	Probabilidade IC + $\gamma$ x 100	Probabilidade Normalizada $y_{ij}$	Coefficiente $\alpha_{kij}$	Coefficiente total $\alpha_{ij}$
$\gamma_{4 \rightarrow 3}$	53,1622 (18)	14,25 (46)	0,166842	4,78 (7)	5,66 (11)
$\gamma_{2 \rightarrow 1}$	79,6142 (19)	7,3 (5)	0,898351	1,495 (22)	1,77 (3)
$\gamma_{1 \rightarrow 0}$	80,9979 (11)	90,05 (6)	1,000000	1,431 (20)	1,703 (24)
$\gamma_{2 \rightarrow 0}$	160,6121 (16)	0,826 (9)	0,101649	0,234 (4)	0,294 (6)
$\gamma_{3 \rightarrow 2}$	223,237 (2)	0,494 (6)	0,017204	0,0836 (12)	0,0975 (14)
$\gamma_{4 \rightarrow 2}$	276,3992 (21)	7,53 (6)	0,088163	0,0460 (7)	0,0566 (8)
$\gamma_{3 \rightarrow 1}$	302,8512 (16)	19,10 (12)	0,665181	0,0373 (6)	0,0434 (6)
$\gamma_{4 \rightarrow 1}$	356,0134 (17)	63,63 (20)	0,744995	0,0211 (3)	0,0254 (4)
$\gamma_{3 \rightarrow 0}$	383,8491 (12)	9,12 (6)	0,317615	0,01684 (24)	0,0202 (3)

**Tabela 3:** Dados atômicos do Bário

	Energia média ponderada	Probabilidade relativa	Probabilidade normalizada, g	Rendimento de fluorescência, $\omega_k$
$K_\alpha$	30,8	154,13	0,809251	0,894 (4)
$K_\beta$	35,3	36,13	0,190749	

**Figura 1:** Esquema de decaimento do Ba-133



## 2. EXPONDO AS TRAJETÓRIAS E SUAS PROBABILIDADES

Uma rota ou trajetória de decaimento seguida no curso do processo de desintegração se define pelas transições em cascata desde o estado fundamental do núcleo pai até o estado fundamental do filho. A transição do Ba-133 ao estado fundamental do Cs-133 pode ocorrer através de 14 rotas alternativas. A **Figura 2** mostra uma planilha Excel com as rotas de decaimento e, na parte inferior de cada linha, que representa as transições em cascata por rota, destaca-se em vermelho a probabilidade normalizada correspondente a cada transição. A planilha calcula (ao final de cada linha com as probabilidades de transição passo a passo) a probabilidade de cada rota (última coluna correspondente ao produto das probabilidades normalizadas de transição de cada linha), desde o Ba-133 ao estado fundamental do Cs-133, em 2, 3, 4 ou 5 passos. Como cada rota se vê como uma série temporal, a probabilidade de segui-la, calculada aqui mediante a planilha Excel e revisada mais adiante mediante um formalismo matricial, simplesmente pode ser vista como um produto de probabilidades de transição normalizadas.

**Figura 2:** Trajetórias de decaimento para a transição do estado fundamental do Ba-133 (nível 5) ao estado fundamental do Cs-133 (nível 0) em 2, 3, 4 e 5 passos.

Passos	Rotas	Nível n=5 -- Prob. de Captura	Nível 4	Nível 3	Nível 2	Nível 1	Nível 0	Prob. da Cascata
2 passos	rota 1	$\gamma_{5-1}$ (Ba)				$\gamma_{1,0}$	(Cs)	0.007000
2 passos	rota 2	$\gamma_{5-2}$ (Ba)			$\gamma_{2,0}$		(Cs)	0.000305
3 passos	rota 3				$\gamma_{2,1}$	$\gamma_{1,0}$	(Cs)	0.002695
2 passos	rota 4	$\gamma_{5-3}$ (Ba)		$\gamma_{3,0}$			(Cs)	0.045927
3 passos	rota 5			$\gamma_{3,1}$		$\gamma_{1,0}$	(Cs)	0.096185
3 passos	rota 6			$\gamma_{3,2}$	$\gamma_{2,0}$		(Cs)	0.000253
4 passos	rota 7			$\gamma_{3,2}$	$\gamma_{2,1}$	$\gamma_{1,0}$	(Cs)	0.002235
3 passos	rota 8	$\gamma_{5-4}$ (Ba)	$\gamma_{4,1}$			$\gamma_{1,0}$	(Cs)	0.636300
3 passos	rota 9		$\gamma_{4,2}$		$\gamma_{2,0}$		(Cs)	0.007654
4 passos	rota 10		$\gamma_{4,2}$		$\gamma_{2,1}$	$\gamma_{1,0}$	(Cs)	0.067646
3 passos	rota 11		$\gamma_{4,3}$	$\gamma_{3,0}$			(Cs)	0.045260
4 passos	rota 12		$\gamma_{4,3}$	$\gamma_{3,1}$		$\gamma_{1,0}$	(Cs)	0.094788
4 passos	rota 13		$\gamma_{4,3}$	$\gamma_{3,2}$	$\gamma_{2,0}$		(Cs)	0.000249
5 passos	rota 14		$\gamma_{4,3}$	$\gamma_{3,2}$	$\gamma_{2,1}$	$\gamma_{1,0}$	(Cs)	0.002202
							$\gamma =$	1

O número de rotas ou trajetórias de decaimento do Ba-133 ao Cs-133 e respectivas probabilidades se resume na **Tabela 4**. A desintegração direta do núcleo pai ao estado fundamental do filho (rota de desintegração em 1 passo), como dito, foi desprezada.

**Tabela 4.** Número de rotas de decaimento e probabilidades em diferentes passos para a transição desde o estado fundamental do Ba-133 ao estado fundamental do Cs-133

Número de passos	1	2	3	4	5	Total
Número de rotas	0	3	6	4	1	14
Probabilidades	0	0,053232	0,7883474	0,164918	0,0022023897	1

## 2.1. Enfoque analítico usando um formalismo matricial

Um possível enfoque para verificar a identificação de todas as rotas de decaimento e suas probabilidades e obter as equações de taxa de contagem (que descreve a soma por coincidência que se produz em espectroscopia gama) se baseia em um formalismo matricial desenvolvido por Novković et al. 2007 [2] e por Nađđerđ et al. [7] para esquemas de decaimento complexos.

O método de Novković, aqui utilizado, foi mais tarde denominado Método de Multiplicação de Matrizes Diretas (DMM) (Novković et al., 2012) [4]. Usando um formalismo matemático (que inclui o produto direto e as somas diretas de algumas matrizes, cujos elementos não são números senão listas de probabilidades de detecção e energias adequadamente organizadas) se pode identificar todos os possíveis caminhos de desintegração, calcular as probabilidades de cada trajetória e finalmente determinar as consequências resultantes daquela trajetória no detector (*path outcomes*), ou seja, a probabilidade de detecção dos fótons e a energia correspondente depositada. O método permite determinar expressões teóricas para as taxas de contagem para cada pico (excluindo picos de escape), assim como a taxa de contagem total. O método de Novković [2] representou a extensão do método de matriz, introduzido por Semkow et al. [8] e modificado por Korun e Martinčić [9] que introduziu níveis virtuais no esquema de desintegração para cada transição que resultasse raios X. O método anterior se aplicava apenas a núcleos com esquema de desintegração relativamente simples, ainda que seguido por emissão de raios X. O enfoque atual deste problema

se baseou no formalismo matricial apenas na fase inicial. A análise posterior se baseia na identificação de todas as vias de desintegração e seus múltiplos resultados no detector.

Nadderđ et al. [7] [10] apresentaram uma variação do método anterior para deduzir estas equações de taxa de contagem. Este enfoque também gera expressões teóricas para todas as taxas de contagem de picos de absorção completa (foto-picos e picos-soma) no espectro, assim como para a taxa de contagem total. Permite também, de maneira simples, uma estimativa da contribuição de efeitos soma por coincidência para radionuclídeos de esquemas complexos de decaimento, tal como o Ba-133.

### 3. MATRIZ DAS TRAJETÓRIAS DE DECAIMENTO

A fim de determinar as trajetórias de decaimento (rotas ou caminhos de desintegração) se introduz uma matriz triangular estritamente inferior (*strictly lower-triangular matrix*), como X, expressão (1), com os elementos de interesse colocados sob a diagonal principal (alguns deles podendo até ser nulos). Em álgebra linear, uma matriz triangular estritamente inferior é um tipo especial de matriz quadrada, cujos valores da diagonal principal e acima dela são todos iguais a 0, ou seja,  $x_{ij} = 0$  para  $i \leq j$ .

Começaremos imaginando um esquema de desintegração geral que representa um núcleo que se desintegra por  $n$  capturas de elétron em um núcleo filho que tem  $n-1$  níveis excitados, recordando que o estado fundamental do núcleo pai se apresenta como um nível excitado do núcleo filho, rotulado por  $n$ , e o estado fundamental do núcleo filho é marcado por 0. A matriz X (1) correspondente a este esquema assim modificado é uma matriz quadrada  $(n + 1) \times (n + 1)$ .

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ x_{10} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ x_{20} & x_{21} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n0} & x_{n1} & \dots & x_{nn-1} & 0 \end{bmatrix}, \quad (1)$$

em que  $x_{ij}$  representa transições do  $i$ -ésimo nível ao  $j$ -ésimo ( $j < i < n$ ) ( $x_{nj}$ , na última linha, representa transições por captura eletrônica do nível  $n$  ao nível  $j$ ).

O núcleo filho do Ba-133, o Cs-133, tem 4 níveis excitados. A matriz quadrada X (2) têm 6 linhas e 6 colunas, incluídos os estados fundamentais do Ba-133 e do Cs-133, ilustrando as possibilidades de transição entre níveis no esquema de decaimento por captura eletrônica do núcleo pai para o núcleo filho <sup>133</sup>Cs.

A transição desde o estado fundamental do núcleo pai até o estado fundamental do núcleo filho pode ocorrer através de rotas alternativas em k passos ou etapas (k = 1, 2, ..., n). Quando k = 1, o núcleo do Ba-133 decai por captura eletrônica diretamente ao estado fundamental do Cs-133, probabilidade desprezada neste estudo (rendimento inferior a 0,001%).

Todas estas possíveis rotas de desintegração se identificam calculando os elementos matriciais [X<sup>k</sup>]<sub>50</sub> (k = 1, 2, 3, 4, 5), ou seja, [X]<sub>50</sub>, [X<sup>2</sup>]<sub>50</sub>, [X<sup>3</sup>]<sub>50</sub>, [X<sup>4</sup>]<sub>50</sub> e [X<sup>5</sup>]<sub>50</sub>. Cada um é o elemento da primeira coluna (ou coluna número 0 em nossa notação) e da 6ª linha das cinco matrizes abaixo, (2), (3), (4), (5) y (6), da primeira até a quinta potência de X.

Para k = 1, como praticamente não há transição direta (por captura eletrônica) do estado fundamental do <sup>133</sup>Ba (nível 5) para o estado fundamental do <sup>133</sup>Cs (nível 0), o elemento matricial de interesse é nulo, [X]<sub>50</sub> = 0.

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_{10} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_{20} & x_{21} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_{30} & x_{31} & x_{32} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x_{41} & x_{42} & x_{43} & 0 & 0 \\ 0 & x_{51} & x_{52} & x_{53} & x_{54} & 0 \end{pmatrix} \quad (2)$$

$$X^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_{10} x_{21} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_{10} x_{31} + x_{20} x_{32} & x_{21} x_{32} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_{10} x_{41} + x_{30} x_{43} + x_{20} x_{42} & x_{31} x_{43} + x_{21} x_{42} & x_{32} x_{43} & 0 & 0 & 0 \\ x_{10} x_{51} + x_{20} x_{52} + x_{30} x_{53} & x_{21} x_{52} + x_{31} x_{53} + x_{41} x_{54} & x_{32} x_{53} + x_{54} x_{42} & x_{43} x_{54} & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3)$$

$$X^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_{10} x_{21} x_{32} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_{10} x_{31} x_{43} + x_{20} x_{32} x_{43} + x_{10} x_{21} x_{42} & x_{21} x_{32} x_{43} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_{10} x_{21} x_{52} + x_{10} x_{31} x_{53} + x_{20} x_{32} x_{53} + x_{10} x_{41} x_{54} + x_{30} x_{43} x_{54} + x_{20} x_{54} x_{42} & x_{21} x_{32} x_{53} + x_{31} x_{43} x_{54} + x_{21} x_{54} x_{42} & x_{32} x_{43} x_{54} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4)$$

$$X^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_{10} x_{21} x_{32} x_{43} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_{10} x_{21} x_{32} x_{53} + x_{10} x_{31} x_{43} x_{54} + x_{20} x_{32} x_{43} x_{54} + x_{10} x_{21} x_{54} x_{42} & x_{21} x_{32} x_{43} x_{54} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (5)$$

$$X^5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \boxed{x_{10} \ x_{21} \ x_{32} \ x_{43} \ x_{54}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (6)$$

A quinta potência da matriz (6) contém apenas um elemento distinto de zero. A transição desde o estado fundamental do Ba-133 ao estado fundamental do Cs-133 pode, como resultado, ocorrer por:

- três rotas de desintegração em duas etapas (para  $k=2$ ):  $[X^2]_{50} = x_{53}x_{30} + x_{52}x_{20} + x_{51}x_{10}$  representando as transições em cascata  $5 \rightarrow 3 \rightarrow 0$ ,  $5 \rightarrow 2 \rightarrow 0$  e  $5 \rightarrow 1 \rightarrow 0$ ;
- seis rotas de decaimento em três etapas ( $k=3$ ):  $[X^3]_{50} = x_{52}x_{21}x_{10} + x_{53}x_{31}x_{10} + x_{53}x_{32}x_{20} + x_{54}x_{41}x_{10} + x_{54}x_{42}x_{20} + x_{54}x_{43}x_{30}$  denotando as transições em cascata  $5 \rightarrow 2 \rightarrow 1 \rightarrow 0$ ,  $5 \rightarrow 3 \rightarrow 1 \rightarrow 0$ ,  $5 \rightarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow 0$ ,  $5 \rightarrow 4 \rightarrow 1 \rightarrow 0$ ,  $5 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 0$  e  $5 \rightarrow 4 \rightarrow 3 \rightarrow 0$ ;
- quatro rotas de decaimento em quatro etapas ( $k=4$ ):  $[X^4]_{50} = x_{53}x_{32}x_{21}x_{10} + x_{54}x_{42}x_{21}x_{10} + x_{54}x_{43}x_{31}x_{10} + x_{54}x_{43}x_{32}x_{20}$  denotando as transições em cascata  $5 \rightarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow 1 \rightarrow 0$ ,  $5 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1 \rightarrow 0$ ,  $5 \rightarrow 4 \rightarrow 3 \rightarrow 1 \rightarrow 0$  e  $5 \rightarrow 4 \rightarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow 0$  e
- uma rota de decaimento em cinco etapas ( $k=5$ ):  $[X^5]_{50} = x_{54}x_{43}x_{32}x_{21}x_{10}$  denotando a transição em cascata  $5 \rightarrow 4 \rightarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow 1 \rightarrow 0$ .

Estas rotas ou trajetórias de desintegração têm diferentes probabilidades (**Tabela 4**), que podem ser determinadas através de uma matriz de probabilidade de transição, conforme segue.

#### 4. MATRIZ DE PROBABILIDADE DE TRANSIÇÃO

Para a formação das equações de taxa de contagem se deve construir também, de maneira similar, a matriz de probabilidade de transição (10) desde o Ba-133, substituindo os elementos  $x_{ij}$  (diferentes de zero) da matriz  $6 \times 6$  anterior pelos dados de desintegração nuclear, deduzidos facilmente dos esquemas de decaimento padrões, disponíveis na literatura [4]. São os valores de  $y_{ij}$  das **Tabelas 1** (coluna 2) e **2** (coluna 4) designando a probabilidade normalizada de transição entre dois níveis, do nível  $i$  ao nível  $j$  ( $j < i < 6$ ). Os elementos da matriz satisfazem as seguintes relações

(7) (8) (ou seja, a soma dos componentes de uma linha, diferentes de zero, deve ser igual à unidade):

$$\sum_{j=0}^{i-1} y_{ij} = 1, \quad i = 1, \dots, n \quad (7)$$

$$\sum_{j=0}^{n-1} y_{nj} = 1. \quad (8)$$

O significado físico destas relações é que o  $i$ -ésimo nível excitado do Cs-133 deve decair a um dos mais baixos, aplicando-se esta regra também ao estado fundamental do Ba-133, nível  $n = i = 5$ . De fato, os elementos  $y_{54}$ ,  $y_{53}$ ,  $y_{52}$  e  $y_{51}$ , da última linha da matriz  $Y$ , representam as probabilidades das transições por captura de elétrons, em destaque na **Figura 1**, do Ba-133 aos níveis 437, 383, 160 e 81 keV do Cs-133, respectivamente. O elemento matricial da matriz  $Y^k$  configurado na  $n$ -ésima linha (última linha) e primeira coluna,  $[Y^k]_{n0}$ , representa a probabilidade da transição do núcleo pai ao estado fundamental do núcleo filho em  $k$  passos.

Estes elementos da matriz devem cumprir a seguinte condição (9):

$$\sum_{k=1}^n [Y^k]_{n0} = 1 \quad (9)$$

Ou seja, o núcleo pai tem 100% de probabilidade de transitar ao estado fundamental do núcleo filho, em até  $k = n$  passos. Por conseguinte, as probabilidades de transição do Ba-133 ao estado fundamental do Cs-133 em 1, 2, 3, 4 e 5 passos estão dados pelos elementos matriciais  $[Y]_{50}$ ,  $[Y^2]_{50}$ ,  $[Y^3]_{50}$ ,  $[Y^4]_{50}$  e  $[Y^5]_{50}$ , respectivamente (10), (11), (12), (13), (14).

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.101649 & 0.89835 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.317615 & 0.66518 & 0.017204 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.744994 & 0.088162 & 0.166842 & 0 & 0 \\ 0 & 0.007 & 0.003 & 0.1446 & 0.8541 & 0 \end{pmatrix} \quad (10)$$

Elevando a matriz ao quadrado,  $Y^2$ :

$$\begin{pmatrix} 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. \\ 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. \\ 0.804774 & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. \\ 0.664182 & 0.0130739 & 0. & 0. & 0. & 0. \\ 0.899224 & 0.100289 & 0.000487456 & 0. & 0. & 0. \\ 0.0542544 & 0.841083 & 0.0877351 & 0.0256278 & 0. & 0. \end{pmatrix} \quad (11)$$

ao cubo, Y3:

$$\begin{pmatrix} 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. \\ 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. \\ 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. \\ 0.0130739 & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. \\ 0.100384 & 0.000392291 & 0. & 0. & 0. & 0. \\ 0.866482 & 0.0875472 & 0.000416336 & 0. & 0. & 0. \end{pmatrix} \quad (12)$$

à quarta potência, Y4:

$$\begin{pmatrix} 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. \\ 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. \\ 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. \\ 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. \\ 0.000392291 & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. \\ 0.0876285 & 0.000335056 & 0. & 0. & 0. & 0. \end{pmatrix} \quad (13)$$

à quinta potência, Y5 (contem apenas um elemento distinto de zero):

$$\begin{pmatrix} 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. \\ 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. \\ 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. \\ 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. \\ 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. \\ 0.000335056 & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. \end{pmatrix} \quad (14)$$

As probabilidades de transição desde o estado fundamental do Ba-133 ao do Cs-133 se resumem na **Tabela 5**.

## 5. CONSEQUÊNCIAS NO DETECTOR

A detecção de uma desintegração de um núcleo se caracteriza por um par de fenômenos: a **soma** das energias que se depositam no detector e a **multiplicação** das probabilidades de detecção (ou não detecção) de toda energia dos fótons emitidos na transição do nível superior ao inferior. Por tanto, depois da determinação de todas as rotas de decaimento, é necessário encontrar este correspondente par, estritamente correlacionado, de consequências resultantes no detector. Cada par representando

o **produto** de probabilidades de detecção (ou não detecção) de certa combinação de fótons de energias determinadas (combinação a estabelecer a partir das rotas já identificadas) e a correspondente **soma** de energias passíveis de ser completamente depositadas no detector.

Conforme o diagrama de árvore da **Figura 3**, cada transição de um nível a outro é um ponto de bifurcação, porque as consequências no detector resultantes de uma transição podem ser diferentes. Como consequência das transições por captura de elétrons (do nível  $n$  ao nível  $j$ ), com respeito à detecção de fótons, são possíveis os seguintes três casos alternativos: a detecção (com certa probabilidade e energia) de um fóton  $K_\alpha$ , de um  $K_\beta$  (emitidos em cada captura eletrônica), ou a ausência de detecção. A cada detecção está associada uma probabilidade e uma energia depositada. Cada rota de decaimento em  $k$  passos tem  $3 \times 4^{k-1}$  pares de consequências resultantes no detector (**Tabela 5**). O número total de resultantes das 14 rotas de decaimento desde o estado fundamental do Ba-133 ao estado fundamental do Cs-133 é 1860 (**Tabela 5**).

**Tabela 5:** Rotas de Decaimento, suas probabilidades e número de resultantes em termos de detecção.

Elemento matricial	k Passos	14 Rotas de Decaimento	Transições	Probabilidade	Nº de Rotas	Nº de resultantes por rota $3 \times 4^{k-1}$	Número total de resultantes
[X <sup>2</sup> ] <sub>50</sub>	2	X51 X10	5 → 1 → 0	0,0070000000	3	12	36
		X52 X20	5 → 2 → 0	0,0003049471			
		X53 X30	5 → 3 → 0	0,0459271436			
[X <sup>3</sup> ] <sub>50</sub>	3	X52 X21 X10	5 → 2 → 1 → 0	0,0026950529	6	48	288
		X53 X31 X10	5 → 3 → 1 → 0	0,0961851362			
		X53 X32 X20	5 → 3 → 2 → 0	0,0002528743			
		X54 X41 X10	5 → 4 → 1 → 0	0,6363000000			
		X54 X42 X20	5 → 4 → 2 → 0	0,0076541718			
		X54 X43 X30	5 → 4 → 3 → 0	0,0452601518			
[X <sup>4</sup> ] <sub>50</sub>	4	X53 X32 X21 X10	5 → 3 → 2 → 1 → 0	0,0022348459	4	192	768
		X54 X42 X21 X10	5 → 4 → 2 → 1 → 0	0,0676458282			
		X54 X43 X31 X10	5 → 4 → 3 → 1 → 0	0,0947882566			
		X54 X43 X32 X20	5 → 4 → 3 → 2 → 0	0,0002492019			
[X <sup>5</sup> ] <sub>50</sub>	5	X54 X43 X32 X21 X10	5 → 4 → 3 → 2 → 1 → 0	0,0022023897	1	768	768
				$\Sigma = 1$	$\Sigma = 14$		$\Sigma = 1.860$

Representamos as probabilidades de detecção de toda a energia de fótons  $K_\alpha$  e  $K_\beta$ , que resultam de capturas de elétrons com transições ao  $j$ -ésimo nível do Cs-133, por  $a_{nj}$  e  $b_{nj}$  respectivamente, e as probabilidades de ausência de detecção destes fótons por  $q_{nj}$ . Observe-se que, no esquema modificado da **Figura 1**,  $n$  é igual a 5. A estas três probabilidades estão estritamente

correlacionadas as energias  $E_{K\alpha}$ ,  $E_{K\beta}$  e 0, correspondentemente.  $E_{K\alpha}$  e  $E_{K\beta}$  são as energias dos fótons  $K\alpha$  e  $K\beta$ , respectivamente, e 0 corresponde a não detecção.

De maneira similar, quando têm lugar as transições do núcleo de Cs-133 de um nível superior  $i$  a um inferior  $j$ , temos as seguintes 4 possibilidades: a detecção de um fóton  $K\alpha$  ou um  $K\beta$  (que se originam a partir de uma conversão interna), a detecção do fóton gama ou a ausência de detecção de qualquer fóton. As probabilidades correspondentes são representadas por  $a_{ij}$ ,  $b_{ij}$ ,  $\gamma_{ij}$  e  $q_{ij}$ . A estas 4 probabilidades estão estritamente correlacionadas as energias  $E_{K\alpha}$ ,  $E_{K\beta}$ ,  $E\gamma_{ij}$  e 0, respectivamente.  $E\gamma_{ij}$  é a energia do fóton gama na transição  $i \rightarrow j$ .

Ou seja, para determinar todos os pares resultantes por rota de decaimento, cada elemento matricial  $x_{ij}$  é substituído por vectores-linha de 3 ou 4 elementos cada. Cada um está associado com os elementos matriciais  $z_{ij}$  de uma matriz  $Z$ , cujos elementos contêm as energias depositadas no detector correspondentes às probabilidades de detecção  $a_{ij}$ ;  $b_{ij}$ ;  $\gamma_{ij}$ ;  $q_{ij}$ .

Para captura eletrônica ( $i = n = 5$ ):

$$x_{nj} = [a_{nj}; b_{nj}; q_{nj}] \quad (15) \qquad z_{nj} = [E_{K\alpha}; E_{K\beta}; 0] \quad (16)$$

ou seja

$$\begin{aligned} x_{54} &= [a_{54}; b_{54}; q_{54}] & z_{54} &= [30,8; 35,3; 0] \\ x_{53} &= [a_{53}; b_{53}; q_{53}] & z_{53} &= [30,8; 35,3; 0] \\ x_{52} &= [a_{52}; b_{52}; q_{52}] & z_{52} &= [30,8; 35,3; 0] \\ x_{51} &= [a_{51}; b_{51}; q_{51}] & z_{51} &= [30,8; 35,3; 0] \end{aligned}$$

Nas transições gama:

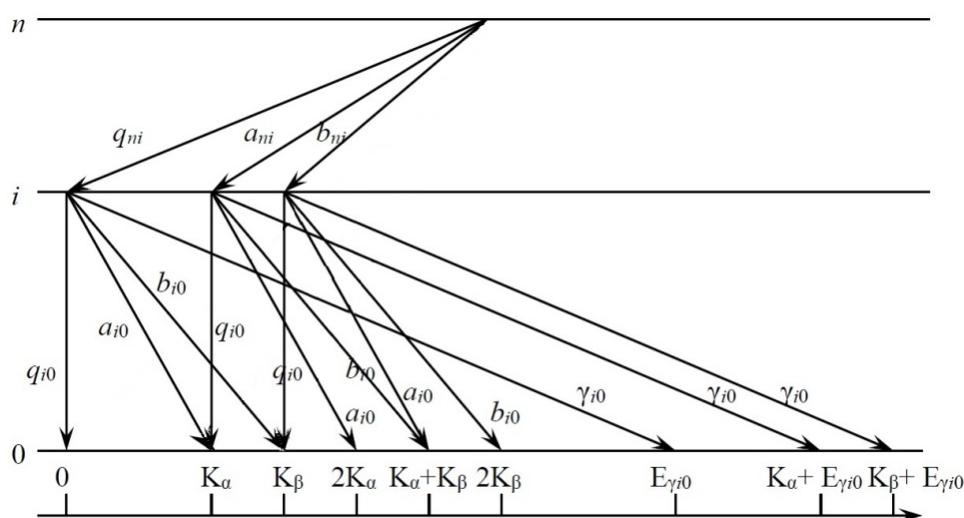
$$x_{ij} = [a_{ij}; b_{ij}; \gamma_{ij}; q_{ij}] \quad (17) \qquad z_{ij} = [E_{K\alpha}; E_{K\beta}; E\gamma_{ij}; 0] \quad (18)$$

ou seja:

$$\begin{aligned} x_{43} &= [a_{43}; b_{43}; \gamma_{43}; q_{43}] & z_{43} &= [30,8; 35,3; 53,16; 0] \\ x_{42} &= [a_{42}; b_{42}; \gamma_{42}; q_{42}] & z_{42} &= [30,8; 35,3; 276,4; 0] \\ x_{41} &= [a_{41}; b_{41}; \gamma_{41}; q_{41}] & z_{41} &= [30,8; 35,3; 356,01; 0] \\ x_{32} &= [a_{32}; b_{32}; \gamma_{32}; q_{32}] & z_{32} &= [30,8; 35,3; 223,24; 0] \\ x_{31} &= [a_{31}; b_{31}; \gamma_{31}; q_{31}] & z_{31} &= [30,8; 35,3; 302,85; 0] \\ x_{30} &= [a_{30}; b_{30}; \gamma_{30}; q_{30}] & z_{30} &= [30,8; 35,3; 383,85; 0] \\ x_{21} &= [a_{21}; b_{21}; \gamma_{21}; q_{21}] & z_{21} &= [30,8; 35,3; 79,61; 0] \\ x_{20} &= [a_{20}; b_{20}; \gamma_{20}; q_{20}] & z_{20} &= [30,8; 35,3; 160,61; 0] \\ x_{10} &= [a_{10}; b_{10}; \gamma_{10}; q_{10}] & z_{10} &= [30,8; 35,3; 81; 0] \end{aligned}$$

onde a, b e  $\gamma$  representam as probabilidades de detecção dos fótons X  $K\alpha$ , X  $K\beta$  e  $\gamma$ , respectivamente, e q é a probabilidade de não detecção.

**Figura 3:** Os produtos das probabilidades de detecção  $a_{nj}$ ,  $b_{nj}$  e  $q_{nj}$  (com  $j = i$ , a título ilustrativo) pelas probabilidades de detecção  $a_{ij}$ ,  $b_{ij}$ ,  $\gamma_{ij}$  e  $q_{ij}$  para  $i > j$  correspondem distintas energias depositadas no detector, como  $K_\alpha$  ( $E_{K_\alpha}$ ),  $K_\beta$  ( $E_{K_\beta}$ ),  $E_{\gamma_{i0}}$  ( $E_{\gamma_{ij}}$ ) e 0, ou somas destas energias. Note-se que a mesma energia depositada no detector pode ser consequência resultante de diferentes rotas de decaimento com diferentes probabilidades de deposição. Neste exemplo, com transições ao estado fundamental em dois passos (resultando doze probabilidades de detecção), em quatro casos, rotas distintas correspondem a uma mesma energia, resultando ao cabo apenas nove energias distintas.



## 6. EXPRESSÕES TEÓRICAS DE TAXA DE CONTAGEM

Uma equação de taxa de contagem contém as probabilidades de detecção (ou de não detecção) de fótons que resultem em dada energia (**Apêndice B**). Como estas probabilidades contém, além de parâmetros atômicos e nucleares conhecidos (**Tabelas 1-3**), valores inicialmente desconhecidos (as eficiências de detecção, total e de pico) as expressões de taxa de contagem contém as probabilidades, em geral, em forma literal ou não explícita ( $a_{ij}$ ,  $b_{ij}$ ,  $\gamma_{ij}$ ,  $q_{ij}$ , por exemplo).

A resultante de uma rota de decaimento caracteriza-se por uma lista de probabilidades de detecção (ou não detecção) dos fótons envolvidos (com deposição de todas as respectivas energias) e por uma correspondente lista de valores das energias depositadas no detector. A energia depositada e a probabilidade desse evento têm a mesma posição nas listas correspondentes. Todos os resultados possíveis ao longo da trajetória devem ser tomados em conta, **multiplicando** suas listas de probabilidades e **somando** suas listas de energia como ilustrado por meio de uma planilha Excel descrita no **Apêndice C**. Cada energia final resultante  $e_i$ , correspondendo a certo produto  $p_i$ , de probabilidades de detecção, corresponde a um possível pico no espectro, dando lugar a uma equação de taxa de contagem onde o número de contagens do pico (de energia  $e_i$ ) será igual ao produto da atividade da fonte (incógnita) pela soma das parcelas com os produtos,  $p_i$ , que representam as probabilidades de deposição da energia  $e_i$  no detector. O número de pares  $p_i - e_i$  é, como já exposto,  $3 \times 4^{k-1}$ , onde  $k$  é o número de passos para a transição do estado fundamental do Ba-133 ao do Cs-133.

A substituição de todos os elementos matriciais que compõem as diversas rotas de decaimento (a primeira coluna na **Tabela 5**) pelos vetores-linha (15 e 17) e sua **multiplicação** mediante a aplicação de um operador  $M$  dá como resultado 14 novas listas de probabilidades. Estas 14 listas podem então reunir-se na lista unificada,  $IP$  (21),

$$IP = \{p_1, p_2, \dots, p_{1860}\} \quad (21)$$

onde  $p_i$  ( $i = 1, 2, \dots, 1860$ ) representa a probabilidade total do  $i$ -ésimo resultado. Um operador  $S$  deve aplicar-se na mesma ordem às listas  $z_{ij}$  (16 e 18) e as listas obtidas se agruparão na lista unificada,  $IE$ , (22):

$$IE = \{e_1, e_2, \dots, e_{1860}\}, \quad (22)$$

onde  $e_i$  representa a energia depositada no detector no  $i$ -ésimo resultado.

Estas quantidades têm a mesma posição nas listas correspondentes e o agrupamento de elementos em  $IP$  pode se realizar de acordo com as mesmas deposições de energia. Entretanto, a

mesma energia depositada no detector pode ser consequência resultante de diferentes rotas de decaimento (**Figura 3**). Ao se reduzir a lista  $\text{I/E}$  agrupando as mesmas energias, se obtém uma nova lista de 168 elementos diferentes,  $\text{I/E}_r$ , apresentada na **Tabela 6**.

As energias na lista  $\text{I/E}_r$  determinam todas as possíveis posições dos picos em um espectro a analisar. As equações de taxa de contagem (de picos de dada energia) se determinam somando todos (os produtos que formam) os elementos da lista  $\text{I/P}$  com a mesma energia depositada e multiplicando pela atividade da fonte, R. O número total de equações de taxa de contagem para o Ba-133 é 168, porém muitos dos 167 picos têm taxas de contagem insignificantes. A equação da taxa de contagem total e as equações de taxa de contagem de pico para os picos mais importantes se dão no **Apêndice A**.

As incógnitas nestas equações são as eficiências, total e de pico (para as energias dadas nas **Tabelas 2 e 3**), e a atividade da fonte medida. Ainda que esta questão esteja fora do escopo do presente artigo, um sistema de equações de taxa de contagem utilizado para a determinação das incógnitas poderia ser (23):

$$\begin{array}{lll}
 N_t = n_t & N(79,61) + N(81) = n(81) & N(302,85) = n(302,85) \\
 N(30,8) = n(30,8) & N(160,61) = n(160,61) & N(356,01) + N(357,4) = n(356,4) \\
 N(35,3) = n(35,3) & N(223,24) = n(223,24) & N(383,85) = n(383,85) \\
 N(53,16) = n(53,16) & N(276,4) = n(276,4) & N(437,01) = n(437,01)
 \end{array} \tag{23}$$

onde a letra n representa valores experimentais da taxa de contagem e N a equação teórica (**Apêndice A**).

**Tabela 6:** A probabilidade de detecção (ou não detecção) dos fótons indicados determina uma lista de 168 energias resultantes.

Energia	Fótons				
0		177,9	$2K_{\alpha} + K_{\beta} + \gamma_{10}$		$2K_{\beta} + \gamma_{31}$
30,8	$K_{\alpha}$	180,86	$3K_{\alpha} + K_{\beta} + \gamma_{43}$		$2K_{\beta} + \gamma_{32} + \gamma_{21}$
35,3	$K_{\beta}$	181,01	$K_{\alpha} + 2K_{\beta} + \gamma_{21}$	266,51	$3K_{\beta} + \gamma_{20}$
53,16	$\gamma_{43}$	182,4	$K_{\alpha} + 2K_{\beta} + \gamma_{10}$		$3K_{\beta} + \gamma_{21} + \gamma_{10}$
61,6	$2K_{\alpha}$	185,36	$2K_{\alpha} + 2K_{\beta} + \gamma_{43}$	275,37	$2K_{\alpha} + \gamma_{43} + \gamma_{20}$
66,1	$K_{\alpha} + K_{\beta}$	185,51	$3K_{\beta} + \gamma_{21}$		$2K_{\alpha} + \gamma_{43} + \gamma_{21} + \gamma_{10}$
70,6	$2K_{\beta}$	186,9	$3K_{\beta} + \gamma_{10}$	276,4	$\gamma_{42}$
79,61	$\gamma_{21}$	189,86	$K_{\alpha} + 3K_{\beta} + \gamma_{43}$		$\gamma_{43} + \gamma_{32}$
81	$\gamma_{10}$	191,41	$K_{\alpha} + \gamma_{20}$	279,87	$K_{\alpha} + K_{\beta} + \gamma_{43} + \gamma_{20}$
83,96	$K_{\alpha} + \gamma_{43}$	194,36	$K_{\alpha} + \gamma_{21} + \gamma_{10}$		$K_{\alpha} + K_{\beta} + \gamma_{43} + \gamma_{21} + \gamma_{10}$
88,46	$K_{\beta} + \gamma_{43}$	194,37	$4K_{\beta} + \gamma_{43}$	284,37	$2K_{\beta} + \gamma_{43} + \gamma_{20}$
92,4	$3K_{\alpha}$	195,76	$2K_{\alpha} + \gamma_{43} + \gamma_{21}$		$2K_{\beta} + \gamma_{43} + \gamma_{21} + \gamma_{10}$
96,9	$2K_{\alpha} + K_{\beta}$	195,91	$2K_{\alpha} + \gamma_{43} + \gamma_{10}$	284,84	$2K_{\alpha} + \gamma_{43} + \gamma_{32}$
101,4	$K_{\alpha} + 2K_{\beta}$	195,91	$K_{\beta} + \gamma_{21} + \gamma_{10}$	289,34	$K_{\alpha} + K_{\beta} + \gamma_{32}$
105,9	$3K_{\beta}$	198,87	$K_{\alpha} + K_{\beta} + \gamma_{43} + \gamma_{21}$	293,84	$2K_{\beta} + \gamma_{32}$
110,41	$K_{\alpha} + \gamma_{21}$	200,26	$K_{\alpha} + K_{\beta} + \gamma_{43} + \gamma_{10}$	302,85	$\gamma_{31}$
111,8	$K_{\alpha} + \gamma_{10}$	202,81	$4K_{\alpha} + \gamma_{21}$		$\gamma_{32} + \gamma_{21}$
114,76	$2K_{\alpha} + \gamma_{43}$	203,37	$2K_{\beta} + \gamma_{43} + \gamma_{21}$	304,24	$\gamma_{32} + \gamma_{10}$
114,91	$K_{\beta} + \gamma_{21}$	204,2	$4K_{\alpha} + \gamma_{21}$	307,2	$K_{\alpha} + \gamma_{42}$
116,3	$K_{\beta} + \gamma_{10}$	204,76	$2K_{\beta} + \gamma_{43} + \gamma_{10}$	311,7	$K_{\alpha} + \gamma_{43} + \gamma_{32}$
119,26	$K_{\alpha} + K_{\beta} + \gamma_{43}$	207,31	$3K_{\alpha} + K_{\beta} + \gamma_{21}$		$K_{\beta} + \gamma_{42}$
123,2	$4K_{\alpha}$	208,7	$3K_{\alpha} + K_{\beta} + \gamma_{10}$	315,64	$3K_{\alpha} + \gamma_{32}$
123,76	$2K_{\beta} + \gamma_{43}$	211,81	$2K_{\alpha} + 2K_{\beta} + \gamma_{21}$	320,14	$2K_{\alpha} + K_{\beta} + \gamma_{32}$
127,7	$3K_{\alpha} + K_{\beta}$	213,2	$2K_{\alpha} + 2K_{\beta} + \gamma_{10}$	324,64	$K_{\alpha} + 2K_{\beta} + \gamma_{32}$
132,2	$2K_{\alpha} + 2K_{\beta}$	213,77	$\gamma_{43} + \gamma_{20}$	329,14	$3K_{\beta} + \gamma_{32}$
132,77	$\gamma_{43} + \gamma_{21}$	216,31	$K_{\alpha} + 3K_{\beta} + \gamma_{21}$	333,65	$K_{\alpha} + \gamma_{31}$
134,16	$\gamma_{43} + \gamma_{10}$	217,7	$K_{\alpha} + 3K_{\beta} + \gamma_{10}$		$K_{\alpha} + \gamma_{32} + \gamma_{21}$
136,7	$K_{\alpha} + 3K_{\beta}$	220,81	$4K_{\beta} + \gamma_{21}$	335,04	$K_{\alpha} + \gamma_{32} + \gamma_{10}$
141,2	$4K_{\beta}$	222,2	$4K_{\beta} + \gamma_{10}$	338	$2K_{\alpha} + \gamma_{42}$
141,21	$K_{\alpha} + \gamma_{21}$	222,21	$2K_{\alpha} + \gamma_{20}$	338,15	$2K_{\alpha} + \gamma_{43} + \gamma_{32}$
142,6	$2K_{\alpha} + \gamma_{10}$	222,21	$2K_{\alpha} + \gamma_{21} + \gamma_{10}$		$K_{\beta} + \gamma_{31}$
145,56	$3K_{\alpha} + \gamma_{43}$	223,24	$\gamma_{32}$	339,54	$K_{\beta} + \gamma_{32} + \gamma_{10}$
145,71	$K_{\alpha} + K_{\beta} + \gamma_{21}$	225,17	$3K_{\alpha} + \gamma_{43} + \gamma_{21}$	342,5	$K_{\alpha} + K_{\beta} + \gamma_{42}$
147,1	$K_{\alpha} + K_{\beta} + \gamma_{10}$	226,56	$3K_{\alpha} + \gamma_{43} + \gamma_{10}$		$K_{\alpha} + K_{\beta} + \gamma_{43} + \gamma_{32}$
150,06	$2K_{\alpha} + K_{\beta} + \gamma_{43}$	226,71	$K_{\alpha} + K_{\beta} + \gamma_{20}$	346,44	$4K_{\alpha} + \gamma_{32}$
150,21	$2K_{\beta} + \gamma_{21}$	229,67	$K_{\alpha} + K_{\beta} + \gamma_{21} + \gamma_{10}$	347	$2K_{\beta} + \gamma_{42}$
151,6	$2K_{\beta} + \gamma_{10}$	231,06	$2K_{\alpha} + K_{\beta} + \gamma_{43} + \gamma_{21}$	350,94	$3K_{\alpha} + K_{\beta} + \gamma_{32}$
154	$5K_{\alpha}$	231,21	$2K_{\beta} + \gamma_{20}$	355,44	$2K_{\alpha} + 2K_{\beta} + \gamma_{32}$
154,56	$K_{\alpha} + 2K_{\beta} + \gamma_{43}$	231,21	$2K_{\beta} + \gamma_{21} + \gamma_{10}$	356,01	$\gamma_{41}$
158,5	$4K_{\alpha} + K_{\beta}$	234,17	$K_{\alpha} + 2K_{\beta} + \gamma_{43} + \gamma_{21}$		$\gamma_{42} + \gamma_{21}$
159,06	$3K_{\beta} + \gamma_{43}$	235,56	$K_{\alpha} + 2K_{\beta} + \gamma_{43} + \gamma_{10}$	357,4	$\gamma_{42} + \gamma_{10}$
160,61	$\gamma_{20}$	238,67	$3K_{\beta} + \gamma_{43} + \gamma_{21}$		$\gamma_{43} + \gamma_{32} + \gamma_{10}$
163	$3K_{\alpha} + 2K_{\beta}$	240,06	$3K_{\beta} + \gamma_{43} + \gamma_{10}$	359,94	$K_{\alpha} + 3K_{\beta} + \gamma_{32}$
163,57	$K_{\alpha} + \gamma_{43} + \gamma_{21}$	244,57	$K_{\alpha} + \gamma_{43} + \gamma_{20}$	364,44	$4K_{\beta} + \gamma_{32}$
164,96	$K_{\alpha} + \gamma_{43} + \gamma_{10}$	249,07	$K_{\beta} + \gamma_{43} + \gamma_{21} + \gamma_{10}$	364,45	$2K_{\alpha} + \gamma_{31}$
167,5	$2K_{\alpha} + 3K_{\beta}$	249,07	$K_{\beta} + \gamma_{43} + \gamma_{20}$		$2K_{\alpha} + \gamma_{32} + \gamma_{21}$
168,07	$K_{\beta} + \gamma_{43} + \gamma_{21}$	253,01	$3K_{\alpha} + \gamma_{20}$	365,84	$2K_{\alpha} + \gamma_{32} + \gamma_{10}$
169,46	$K_{\beta} + \gamma_{43} + \gamma_{10}$	253,01	$3K_{\alpha} + \gamma_{21} + \gamma_{10}$	368,8	$3K_{\alpha} + \gamma_{42}$
172	$K_{\alpha} + 4K_{\beta}$	254,04	$K_{\alpha} + \gamma_{32}$		$3K_{\alpha} + \gamma_{43} + \gamma_{32}$
172,01	$3K_{\alpha} + \gamma_{21}$	257,51	$2K_{\alpha} + K_{\beta} + \gamma_{20}$	368,95	$K_{\alpha} + K_{\beta} + \gamma_{31}$
173,4	$3K_{\alpha} + \gamma_{10}$	258,54	$2K_{\alpha} + K_{\beta} + \gamma_{21} + \gamma_{10}$		$K_{\alpha} + K_{\beta} + \gamma_{32} + \gamma_{21}$
176,36	$4K_{\alpha} + \gamma_{43}$	262,01	$K_{\beta} + \gamma_{32}$	370,34	$K_{\alpha} + K_{\beta} + \gamma_{32} + \gamma_{10}$
176,5	$5K_{\beta}$		$K_{\alpha} + 2K_{\beta} + \gamma_{20}$	373,3	$2K_{\alpha} + K_{\beta} + \gamma_{42}$
176,51	$2K_{\alpha} + K_{\beta} + \gamma_{21}$		$K_{\alpha} + 2K_{\beta} + \gamma_{20}$		$2K_{\alpha} + K_{\beta} + \gamma_{43} + \gamma_{32}$

	$2K_{\beta} + \gamma_{43} + \gamma_{31}$
	$2K_{\beta} + \gamma_{43} + \gamma_{32} + \gamma_{21}$
428	$2K_{\beta} + \gamma_{42} + \gamma_{10}$
	$2K_{\beta} + \gamma_{43} + \gamma_{32} + \gamma_{10}$
	$\gamma_{41} + \gamma_{10}$
	$\gamma_{42} + \gamma_{20}$
	$\gamma_{43} + \gamma_{30}$
437,01	$\gamma_{42} + \gamma_{21} + \gamma_{10}$
	$\gamma_{43} + \gamma_{31} + \gamma_{10}$
	$\gamma_{43} + \gamma_{32} + \gamma_{20}$
	$\gamma_{43} + \gamma_{32} + \gamma_{21} + \gamma_{10}$
	$2K_{\alpha} + \gamma_{30}$
445,45	$2K_{\alpha} + \gamma_{31} + \gamma_{10}$
	$2K_{\alpha} + \gamma_{32} + \gamma_{20}$
	$2K_{\alpha} + \gamma_{32} + \gamma_{21} + \gamma_{10}$
	$K_{\alpha} + K_{\beta} + \gamma_{30}$
449,95	$K_{\alpha} + K_{\beta} + \gamma_{31} + \gamma_{10}$
	$K_{\alpha} + K_{\beta} + \gamma_{32} + \gamma_{20}$
	$K_{\alpha} + K_{\beta} + \gamma_{32} + \gamma_{21} + \gamma_{10}$
	$2K_{\beta} + \gamma_{30}$
454,45	$2K_{\beta} + \gamma_{31} + \gamma_{10}$
	$2K_{\beta} + \gamma_{32} + \gamma_{20}$
	$2K_{\beta} + \gamma_{32} + \gamma_{21} + \gamma_{10}$
	$K_{\alpha} + \gamma_{41} + \gamma_{10}$
	$K_{\alpha} + \gamma_{42} + \gamma_{20}$
	$K_{\alpha} + \gamma_{43} + \gamma_{30}$
467,81	$K_{\alpha} + \gamma_{42} + \gamma_{21} + \gamma_{10}$
	$K_{\alpha} + \gamma_{43} + \gamma_{31} + \gamma_{10}$
	$K_{\alpha} + \gamma_{43} + \gamma_{32} + \gamma_{20}$
	$K_{\alpha} + \gamma_{43} + \gamma_{32} + \gamma_{21} + \gamma_{10}$
	$K_{\beta} + \gamma_{41} + \gamma_{10}$
	$K_{\beta} + \gamma_{42} + \gamma_{20}$
	$K_{\beta} + \gamma_{43} + \gamma_{30}$
472,31	$K_{\beta} + \gamma_{42} + \gamma_{21} + \gamma_{10}$
	$K_{\beta} + \gamma_{43} + \gamma_{31} + \gamma_{10}$
	$K_{\beta} + \gamma_{43} + \gamma_{32} + \gamma_{20}$
	$K_{\beta} + \gamma_{43} + \gamma_{32} + \gamma_{21} + \gamma_{10}$

## 7. RECAPITULAÇÃO DO METODO DMM E CONCLUSÃO

O procedimento para se deduzir expressões teóricas para as taxas de contagem de picos consiste dos seguintes passos: **1-** formar a matriz simbólica  $X$ , aplicando-a para a identificação de todos os caminhos de desintegração, **2-** formar a matriz de probabilidade  $Y$ , usando dados conhecidos do esquema de desintegração, **3-** substituir o elemento matricial  $x_{ij}$  por um vetor-linha que contém 4 (ou 3) elementos (probabilidades de detectar fótons  $K_{\alpha}$ ,  $K_{\beta}$  e  $\gamma$ , e de não detectar fótons), **4-** formar o vetor-linha  $z_{ij}$  que contém as energias correspondentes depositadas no detector, **5-** proceder a multiplicação direta de matrizes  $x_{ij}$  ao longo de todas as rotas de decaimento, **6-** proceder a soma direta de matrizes  $z_{ij}$  ao longo de todas as rotas de decaimento, **7-** agrupar e somar as probabilidades de detecção para a mesma energia (formando as equações teóricas de taxa de contagem de pico).

O método descrito foi desenvolvido para radionuclídeos EC (captura eletrônica), seguido por dois fótons  $X$  que podem ser detectados por um espectrômetro de germânio. É fácil adaptar este método para radionuclídeos EC que emitem três (ou mais) fótons  $X$ . Nesse caso, as listas  $x_{ij}$  (expressões 15 e 17) e também  $z_{ij}$  (expressões 16 e 18) se ampliam em um ou mais termos.

A planilha Excel representando a árvore de consequências resultantes no detector pode ser obtida em formato eletrônico dos autores através do e-mail [alfredo@ird.gov.br](mailto:alfredo@ird.gov.br). Uma orientação para sua construção é dada no **Apêndice C**. Alternativamente se pode usar um programa em FORTRAN que também pode ser obtido dos autores.

## REFERENCIAS

- [1] Ferreira Filho, A. L., da Silva, R., da Cruz, P. A. L., da Silva, C. J., Poledna, R., Araújo, M. T. F., Arcanjo, C. F., Delgado, J.U., Lopes, R.T. Application of the sum-peak method to activity standardizations of  $^{152}\text{Eu}$  sources in LNMRI (BR), **Applied Radiation and Isotopes** (2017). Doi:10.1016/j.apradiso.2017.09.041

- [2] Novković, D., Kandić, A., Durašević, M., Vukanac, I., Milošević, Z., Nadder, L. Coincidence summing of X- and  $\gamma$ -rays in  $\gamma$ -ray spectrometry. **Nuclear Instruments and Methods in Physics Research**, Sect. A Accel. Spectrometers, Detect. Assoc. Equip. 578, 207–217 (2007). doi:10.1016/j.nima.2007.05.199
- [3] Novković, D., Kandić, A., Durašević, M., Vukanac, I., Milošević, Z., Nadder, L. The direct measurement of  $^{133}\text{Ba}$  activity by the sum-peak method. **Nuclear Instruments & Methods in Physics Research**, A 608, 116-120 (2009).
- [4] Novković, D., Kandić, A., Vukanac, I., Durašević, M., Milošević, Z. The direct measurement of  $^{57}\text{Co}$  activity by the sum-peak method. **Applied Radiation and Isotopes**, 70, 2154–2156, (2012) doi:10.1016/j.apradiso.2012.02.088
- [5] Novković, D., Durašević, M., Kandić, A., Vukanac, I., Šešlak, B., Milošević, Z. Coincidence summing corrections for point and volume  $^{152}\text{Eu}$  sources. **Applied Radiation and Isotopes**, 107, 138–144 (2016). doi:10.1016/j.apradiso.2015.10.015
- [6] Chechev V. P., Kuzmenko N. K. Table of Radionuclides. **DDEP/LNHB  $^{133}\text{Ba}$  Recommended Data** (Khlopin Radium Institute / KRI), [http://www.nucleide.org/DDEP\\_WG/Nuclides/Ba-133\\_tables.pdf](http://www.nucleide.org/DDEP_WG/Nuclides/Ba-133_tables.pdf) (2015).
- [7] Nadder, L. J., Jordanov, D. J., Davidović, M. D. A new matrix method for calculating coincidence summing effects for gamma spectroscopy. **Nuclear Instruments and Methods in Physics Research**, 662, 1, 21–25 (2012). doi:10.1016/j.nima.2011.10.002
- [8] Semkov T. M., Mehmood G., Parekh P. P. y Virgil M. Coincidence summing in gamma-ray spectroscopy. **Nuclear Instruments and Methods**, A 290, p. 437 (1990).
- [9] Korun M. e Martinčić R. **Nuclear Instruments and Methods**, A 325, p. 478 (1993).
- [10] Nadder, L. J., Davidović, M. D., Davidović D. M. Jordanov, D. J., Milošević M. J. Jordanov D. J. Stankovića S. J., Prvanović S. L. A possible improvement of the determination of  $^{133}\text{Ba}$  activity and detection efficiency by the sum-peak method, by inclusion of the previously neglected transitions. **Nuclear Instruments and Methods in Physics Research** 698, 60-65 (2013), <https://doi.org/10.1016/j.nima.2012.09.044>

## Apêndice A

### Equações de taxa de contagem

Se desejássemos obter a equação para a taxa de contagem **total**,  $N_t$  em (23), ela poderia ser obtida da seguinte maneira. Se  $Q$  representa a probabilidade de não detecção de qualquer fóton em todas as 14 rotas de desintegração, então  $P = 1 - Q$  representa a probabilidade de detecção de qualquer fóton em qualquer parte do espectro. Portanto, a equação de taxa de contagem total (A1) é:

$$N_t = R (1 - Q), \quad (A1)$$

onde  $R$  é a atividade da fonte.

As posições dos 14 elementos da lista  $IP$  que representam a probabilidade de não detecção para as rotas de desintegração são as mesmas que as posições com 0 na lista  $IE$ . Portanto, podemos reconhecê-los e coletá-los (A.1).

$$N_t = R (1 - q_{53q30} - q_{52q20} - q_{51q10} - q_{52q21q10} - q_{53q31q10} - q_{53q32q20} - q_{53q32q21q10} - q_{54q41q10} - q_{54q42q20} - q_{54q42q21q10} - q_{54q43q30} - q_{54q43q31q10} - q_{54q43q32q20} - q_{54q43q32q21q10}) \quad (A.2)$$

As equações de taxa de contagem para os picos de energias 30,8; 35,3; 53,16; 79,61; 81; 160,61; 223,24; 276,4; 302,85; 356,01; 383,85; 437,01 (em keV) são (A.3).

$$N(30,8) = R(a_{53q30} + a_{53q31q10} + a_{53q32q20} + a_{53q32q21q10} + a_{54q41q10} + a_{54q42q20} + a_{54q42q21q10} + a_{54q43q30} + a_{54q43q31q10} + a_{54q43q32q20} + a_{54q43q32q21q10} + q_{53a30} + q_{53a31q10} + q_{53a32q20} + q_{53a32q21q10} + q_{53q31a10} + q_{53q32a20} + q_{53q32a21q10} + q_{53q32q21a10} + q_{54a41q10} + q_{54a42q20} + q_{54a42q21q10} + q_{54a43q30} + q_{54a43q31q10} + q_{54a43q32q20} + q_{54a43q32q21q10} + q_{54q41a10} + q_{54q42a20} + q_{54q42a21q10} + q_{54q42q21a10} + q_{54q43a30} + q_{54q43a31q10} + q_{54q43a32q20} + q_{54q43a32q21q10} + q_{54q43q31a10} + q_{54q43q32a20} + q_{54q43q32a21q10} + q_{54q43q32q21a10} + a_{51q10} + q_{51a10} + a_{52q20} + q_{52a20} + a_{52q21q10} + q_{52a21q10} + q_{52q21a10})$$

$$N(35,3) = R(b_{53q30} + b_{53q10q31} + b_{53q20q32} + b_{53q10q21q32} + b_{54q10q41} + b_{54q20q42} + b_{54q10q21q42} + b_{64q30q43} + b_{54q10q31q43} + b_{54q20q32q43} + b_{54q10q21q32q43} + b_{30q53} + b_{31q10q53} + b_{32q20q53} + b_{32q10q21q53} + b_{10q31q53} + b_{20q32q53} + b_{21q10q32q53} + b_{10q21q32q53} + b_{41q10q54})$$

$$+b_{42}q_{20}q_{54} + b_{42}q_{10}q_{21}q_{54} + b_{43}q_{30}q_{54} + b_{43}q_{10}q_{31}q_{54} + b_{43}q_{20}q_{32}q_{54} + b_{43}q_{10}q_{21}q_{32}q_{54} + b_{10}q_{41}q_{54} + b_{20}q_{42}q_{54} + b_{21}q_{10}q_{42}q_{54} + b_{10}q_{21}q_{42}q_{54} + b_{30}q_{43}q_{54} + b_{31}q_{10}q_{43}q_{54} + b_{32}q_{20}q_{43}q_{54} + b_{32}q_{10}q_{21}q_{43}q_{54} + b_{10}q_{31}q_{43}q_{54} + b_{20}q_{32}q_{43}q_{54} + b_{21}q_{10}q_{32}q_{43}q_{54} + b_{10}q_{21}q_{32}q_{43}q_{54} + b_{51}q_{10} + b_{10}q_{51} + b_{52}q_{20} + b_{20}q_{52} + b_{52}q_{10}q_{21} + b_{21}q_{10}q_{52} + b_{10}q_{21}q_{52})$$

$$N(53,16) = R\gamma_{43} (q_{30}q_{54} + q_{10}q_{31}q_{54} + q_{20}q_{32}q_{54} + q_{10}q_{21}q_{32}q_{54})$$

$$N(79,61) = R(q_{10}q_{32}q_{53}\gamma_{21} + q_{10}q_{42}q_{54}\gamma_{21} + q_{10}q_{32}q_{43}q_{54}\gamma_{21} + q_{10}q_{52}\gamma_{21})$$

$$N(81) = R(q_{31}q_{53}\gamma_{10} + q_{21}q_{32}q_{53}\gamma_{10} + q_{41}q_{54}\gamma_{10} + q_{21}q_{42}q_{54}\gamma_{10} + q_{31}q_{43}q_{54}\gamma_{10} + q_{21}q_{32}q_{43}q_{54}\gamma_{10} + q_{51}\gamma_{10} + q_{21}q_{52}\gamma_{10})$$

$$N(160,61) = R(q_{32}q_{53}\gamma_{20} + q_{42}q_{54}\gamma_{20} + q_{32}q_{43}q_{54}\gamma_{20} + q_{32}q_{53}\gamma_{10}\gamma_{21} + q_{42}q_{54}\gamma_{10}\gamma_{21} + q_{32}q_{43}q_{54}\gamma_{10}\gamma_{21} + q_{52}\gamma_{20} + q_{52}\gamma_{10}\gamma_{21})$$

$$N(223,24) = R(q_{20}q_{53}\gamma_{32} + q_{10}q_{21}q_{53}\gamma_{32} + q_{20}q_{43}q_{54}\gamma_{32} + q_{10}q_{21}q_{43}q_{54}\gamma_{32})$$

$$N(276,4) = R(q_{20}q_{54}\gamma_{42} + q_{10}q_{21}q_{54}\gamma_{42} + q_{20}q_{54}\gamma_{32}\gamma_{43} + q_{10}q_{21}q_{54}\gamma_{32}\gamma_{43})$$

$$N(302,85) = R(q_{10}q_{53}\gamma_{31} + q_{10}q_{43}q_{54}\gamma_{31} + q_{10}q_{53}\gamma_{21}\gamma_{32} + q_{10}q_{43}q_{54}\gamma_{21}\gamma_{32})$$

$$N(356,01) = R(q_{10}q_{54}\gamma_{41} + q_{10}q_{54}\gamma_{21}\gamma_{42} + q_{10}q_{54}\gamma_{31}\gamma_{43} + q_{10}q_{54}\gamma_{21}\gamma_{32}\gamma_{43})$$

$$N(383,85) = R(q_{53}\gamma_{30} + q_{43}q_{54}\gamma_{30} + q_{53}\gamma_{10}\gamma_{31} + q_{43}q_{54}\gamma_{10}\gamma_{31} + q_{53}\gamma_{20}\gamma_{32} + q_{43}q_{54}\gamma_{20}\gamma_{32} + q_{53}\gamma_{10}\gamma_{21}\gamma_{32} + q_{43}q_{54}\gamma_{10}\gamma_{21}\gamma_{32})$$

$$N(437,01) = R(q_{54}\gamma_{10}\gamma_{41} + q_{54}\gamma_{20}\gamma_{42} + q_{54}\gamma_{10}\gamma_{21}\gamma_{42} + q_{54}\gamma_{30}\gamma_{43} + q_{54}\gamma_{10}\gamma_{31}\gamma_{43} + q_{54}\gamma_{20}\gamma_{32}\gamma_{43} + q_{54}\gamma_{10}\gamma_{21}\gamma_{32}\gamma_{43})$$

(A.3)

## Apêndice B

### As probabilidades de detecção

Além da incógnita  $R$  representando a atividade da fonte, cada uma das equações de taxa de contagem (**Apêndice A**) contém as probabilidades de detecção (ou não detecção) de fótons de dada energia, probabilidades que são definidas mediante parâmetros atômicos e nucleares conhecidos (**Tabelas 1-3**) e pelas eficiências, total e de pico, que, como a atividade, são as incógnitas nessas equações.

#### B.1. Captura de elétrons

O Ba-133 se desintegra por captura eletrônica e transita ao  $i$ -ésimo nível do Cs-133. As probabilidades de detectar fótons  $K_\alpha$  e  $K_\beta$  emitidos nas capturas dos elétrons da camada K do átomo pai nas transições ao nível  $i$  do núcleo filho excitado são, respectivamente, (B.1) e (B.2):

$$a_{nj}(E_{K\alpha}) = y_{nj} \varepsilon(E_{K\alpha}) P_{Kj} \omega_K g_1 \quad (\text{B.1}) \quad b_{nj}(E_{K\beta}) = y_{nj} \varepsilon(E_{K\beta}) P_{Kj} \omega_K g_2 \quad (\text{B.2})$$

onde

- $P_{Kj}$  é a probabilidade de capturar os elétrons da camada K com transição ao nível  $j$ ,
- $\omega_K$  é o rendimento fluorescente para a camada K,
- $\varepsilon(E)$  é a eficiência de pico de energia  $E$ ,
- $y_{nj}$  é a probabilidade de captura de elétrons, e
- $g_1$  e  $g_2$  são, respectivamente, as frações de  $K_\alpha$  e  $K_\beta$  ( $g_1 + g_2 = 1$ ),

A probabilidade de não detecção é (B.3):

$$q_{nj} = y_{nj} [1 - \varepsilon_i(E_{K\alpha}) P_{Kj} \omega_K g_1 - \varepsilon_i(E_{K\beta}) P_{Kj} \omega_K g_2], \quad (\text{B.3})$$

onde  $\varepsilon_i(E)$  é a eficiência total para a energia  $E$ .

## B.2. Conversão interna

As probabilidades de detectar fótons  $K_\alpha$  e  $K_\beta$  criados na conversão interna na transição  $i \rightarrow j$  são, respectivamente, (B.4) e (B.5):

$$a_{ij} = y_{ij} \varepsilon(E_{K\alpha}) \alpha_{Kij} / (1 + \alpha_{ij}) \omega_K g_1 \quad (\text{B.4}) \quad b_{ij} = y_{ij} \varepsilon(E_{K\beta}) \alpha_{Kij} / (1 + \alpha_{ij}) \omega_K g_2 \quad (\text{B.5})$$

onde

- $\alpha_{Kij}$  e  $\alpha_{ij}$  são os coeficientes de conversão interna da camada K e total, respectivamente,
- $y_{ij}$  é a probabilidade normalizada para a transição  $i \rightarrow j$ .

A probabilidade de detectar fótons gama emitidos na transição  $i \rightarrow j$  é (B.6):

$$\gamma_{ij} = y_{ij} \varepsilon(E_{ij}) / (1 + \alpha_{ij}) \quad (\text{B.6})$$

e a probabilidade de não detecção na mesma transição  $i \rightarrow j$  é (B.7)

## Apêndice C

### Planilha Excel

Orientação para a construção da planilha de cálculo Excel, representando a árvore de consequências resultantes no detector.

Nas 4 primeiras linhas da planilha de cálculo (linhas 1 a 4), divide-se 768 colunas (colunas A até ACN) em 3 partes (3 x 256), nomeando todas as células de cada parte respectivamente com as letras “a”, “b” e “q” (formato de texto), representando  $K_\alpha$ ,  $K_\beta$  e a não detecção,  $q$ . Utilizar para as letras os subíndices 54, 53, 52 e 51 respectivamente em cada linha, representando as transições por captura eletrônica desde o Ba-133 (nível 5) aos 4 níveis excitados do núcleo filho, o Cs-133.

Nas quatro linhas seguintes (5 - 8), dividem-se as 768 colunas em 12 partes, nomeando todas as células das 4 primeiras partes com as letras “a”, “b”, “ $\gamma$ ” e “q” ( $\gamma$  representando a emissão  $\gamma$ ) e repetindo o esquema nas partes seguintes. Utilizar nas mencionadas letras os subíndices 43, 42, 41 e 40, respectivamente em cada linha, representando as transições de níveis até o estado fundamental do Cs-133 (nível 0).

Nas 3 linhas seguintes (9 - 11), dividem-se as 768 colunas em 48 partes nomeando as 4 primeiras com as letras “a”, “b”, “ $\gamma$ ” e “q”; e repetindo o esquema nas partes seguintes. Utilizar nas letras os subíndices 32, 31 e 30, respectivamente em cada linha.

Ilustrando as subdivisões da primeira terça parte do total de 768 colunas (256 primeiras colunas), a **Figura 4** apresenta um esquema com somente as primeiras 11 linhas de um total de 14, esquema que se repete duas vezes à direita quando se substitui  $a_{nj}$ , das primeiras 4 linhas, por  $b_{nj}$  e  $q_{nj}$ .

Nas duas linhas seguintes (12-13), dividem-se as 768 colunas em 192 partes nomeando sempre as 4 primeiras partes com as letras “a”, “b”, “ $\gamma$ ” e “q”; e repetindo o esquema nas partes seguintes. Utilizar nas mencionadas letras os subíndices 32, 31 e 30, respectivamente em cada linha.

Na linha 14 utilizam-se todas as 768 células nomeando sempre as 4 primeiras células com as letras “a”, “b”, “ $\gamma$ ” e “q”; e repetindo o esquema nas células seguintes. Utilizar nas letras o subíndice 10.

Uma vez estabelecido este esquema é possível determinar verticalmente, abaixo na coluna correspondente, todos os pares de consequências resultantes no detector para cada uma das 14 rotas de decaimento.

A título de exemplo, na **Figura 4** se observa quatro das doze resultantes da rota  $x_{53} x_{30}$  que expressam as probabilidades de detecção. A primeira resultante se obtém com a função CONCATENAR (A2; "\*" ; A11; ";"). Ao se repetir o processo outra vez, substituindo-se as letras “a”, “b”, “ $\gamma$ ” e “q” das células pelos valores numéricos de energia e utilizando a função SOMA, se obtém as energias correspondentes, por exemplo (A2 + A11).

**Figura 4:** A terça parte do diagrama em árvore ilustrando as subdivisões das primeiras 11 linhas (e 256 primeiras colunas) da planilha de cálculo Excel. As subdivisões continuam nas três linhas não apresentadas no esquema. Nesta terça parte da árvore, pode-se determinar quatro das doze resultantes da rota  $x_{53} x_{30}$  como apresentado na parte de baixo da figura.

a <sub>54</sub>															
a <sub>53</sub>															
a <sub>52</sub>															
a <sub>51</sub>															
a <sub>43</sub>				b <sub>43</sub>				γ <sub>43</sub>				q <sub>43</sub>			
a <sub>42</sub>				b <sub>42</sub>				γ <sub>42</sub>				q <sub>42</sub>			
a <sub>41</sub>				b <sub>41</sub>				γ <sub>41</sub>				q <sub>41</sub>			
a <sub>40</sub>				b <sub>40</sub>				γ <sub>40</sub>				q <sub>40</sub>			
a <sub>32</sub>	b <sub>32</sub>	γ <sub>32</sub>	q <sub>32</sub>	a <sub>32</sub>	b <sub>32</sub>	γ <sub>32</sub>	q <sub>32</sub>	a <sub>32</sub>	b <sub>32</sub>	γ <sub>32</sub>	q <sub>32</sub>	a <sub>32</sub>	b <sub>32</sub>	γ <sub>32</sub>	q <sub>32</sub>
a <sub>31</sub>	b <sub>31</sub>	γ <sub>31</sub>	q <sub>31</sub>	a <sub>31</sub>	b <sub>31</sub>	γ <sub>31</sub>	q <sub>31</sub>	a <sub>31</sub>	b <sub>31</sub>	γ <sub>31</sub>	q <sub>31</sub>	a <sub>31</sub>	b <sub>31</sub>	γ <sub>31</sub>	q <sub>31</sub>
a <sub>30</sub>	b <sub>30</sub>	γ <sub>30</sub>	q <sub>30</sub>	a <sub>30</sub>	b <sub>30</sub>	γ <sub>30</sub>	q <sub>30</sub>	a <sub>30</sub>	b <sub>30</sub>	γ <sub>30</sub>	q <sub>30</sub>	a <sub>30</sub>	b <sub>30</sub>	γ <sub>30</sub>	q <sub>30</sub>
Rota x <sub>53</sub> x <sub>30</sub>															
a <sub>53</sub> *a <sub>30</sub>	a <sub>53</sub> *b <sub>30</sub>	a <sub>53</sub> *γ <sub>30</sub>	a <sub>53</sub> *q <sub>30</sub>												
30,8+30,8	30,8+35,3	30,8+383	30,8+0;												

Para se obter, para cada rota, tanto a lista com as probabilidades de detecção como a lista com as correspondentes energias (12 pares resultantes para o caso no exemplo dessa rota de somente dois passos), se deve utilizar, em uma coluna qualquer à direita das 768 anteriores, de novo a função CONCATENAR, agora horizontalmente. Exemplo para a linha 16, como na **Figura 4**: CONCATENAR (A16: ACN16; ";").

Por último é só concatenar de novo agora verticalmente tanto todas as listas de probabilidades de detecção obtidas de todas as rotas como as listas das energias correspondentes, mantendo nas duas listas assim unificadas a ordem em que aparecem os 1860 resultados. Ou seja, principalmente

ao ordenar o par de listas em ordem crescente de energia, manter sempre a correspondência probabilidade versus energia.

Cada energia corresponde a um possível pico no espectro, dando lugar a uma equação de taxa de contagem onde o número de contagens do pico será igual ao produto da incógnita R (atividade da fonte) pela soma das parcelas que representam as probabilidades, por rota, de deposição dessa energia no detector.